Statistikaflevering uge 5

Opgave 1 *I en produktion af skinker er spredningen på pH-niveauet for et år siden bestemt til $\sigma = 0,15$. Produktionstallene fra den sidste uge viser at standardafvigelsen er $s = 0,10$ for 25 målinger. Er den nye spredning signifikant lavere end den oprindeliget bestemte?*

Vi bruger χ^2-test til sammenligning af spredningerne.

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0 &: \quad \sigma \geq \sigma_0 \\ \mathrm{H}_1 &: \quad \sigma < \sigma_0 \end{aligned}$$

Vi beregner så teststørrelsen,

$$\chi^2 = \frac{s^2 \cdot f}{\sigma_0^2} = \frac{0.10^2 \cdot (25-1)}{0.15^2} = 10.667.^{**}$$

Acceptområdet er

$$\begin{aligned} \alpha = 5\% &: \quad \left[\chi^2_\alpha(f); \infty\right[= \left[\chi^2_{0.05}(24); \infty\right[= [13.85; \infty[\\ \alpha = 1\% &: \quad \left[\chi^2_\alpha(f); \infty\right[= \left[\chi^2_{0.01}(24); \infty\right[= [10.86; \infty[\\ \alpha = 0.1\% &: \quad \left[\chi^2_\alpha(f); \infty\right[= \left[\chi^2_{0.001}(24); \infty\right[= [8.08; \infty[\end{aligned}$$

H_0 kan altså afvises med 2 stjerner, og der er derfor statistisk bevis for, at den nye spredning er signifikant lavere end den gamle.

Opgave 2 *Fra to partier af jordbærmarmelade udtages prøver hvori sukkerindholdet analyseres:*

Parti	Sukkerindhold	$\overline{x}$	s
A	55.0, 53.2, 51.4, 49.8, 50.5, 53.5, 52.2, 56.0, 54.1, 56.6	53.2	2.28
B	56.7, 59.2, 55.9, 54.3, 53.4, 57.4, 53.0, 51.2, 53.4, 54.8	54.9	2.38

Er der forskel på sukkerindholdet i de to partier?

Vi starter med at kigge på, om der er varianshomogenitet, hvilket betyder, at vi skal have fat i en F-test.

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0 &: \quad \sigma_A = \sigma_B \\ \mathrm{H}_1 &: \quad \sigma_A \neq \sigma_B \end{aligned}$$

Vi kan så beregne teststørrelsen:

$$F = \frac{s^2_{\max}}{s^2_{\min}} = \frac{2.38^2}{2.28^2} = 1.09$$

Acceptområde:

$$\begin{aligned} \alpha = 5\% &: \quad \left[1; F_{1-\alpha/2}(f_{\max}, f_{\min})\right[= [1; F_{0.975}(9,9)[= [1; 4.03] \\ \alpha = 1\% &: \quad \left[1; F_{1-\alpha/2}(f_{\max}, f_{\min})\right[= [1; F_{0.995}(9,9)[= [1; 6.54] \\ \alpha = 0.1\% &: \quad \left[1; F_{1-\alpha/2}(f_{\max}, f_{\min})\right[= [1; F_{0.9995}(9,9)[= [1; 12.1] \end{aligned}$$

H_0 accepteres, og det kan altså ikke afvises, at $\sigma_A = \sigma_B$.

Da vi nu har bekræftet varianshomogeniteten, kan vi fortsætte til t-test.

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu_A = \mu_B \\ H_1: &\quad \mu_A \neq \mu_B \end{aligned}$$

Vi beregner først s^2_{pool}

$$s^2_{\text{pool}} = \frac{s_1^2 \cdot f_1 + s_2^2 \cdot f_2}{f_1 + f_2} = \frac{2.28^2 \cdot 9 + 2.38^2 \cdot 9}{9+9} = 5.43,$$

og så teststørrelsen

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_{\text{pool}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{53.2 - 54.9}{\sqrt{5.43} \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = -1.631.$$

Acceptområdet er

$$\alpha = 5\%: \quad |t| \leq t_{1-\alpha/2}(f_1 + f_2) = t_{0.975}(18) = 2.101$$

$$\alpha = 5\%: \quad |t| \leq t_{1-\alpha/2}(f_1 + f_2) = t_{0.995}(18) = 2.878$$

$$\alpha = 5\%: \quad |t| \leq t_{1-\alpha/2}(f_1 + f_2) = t_{0.9995}(18) = 3.922$$

H_0 accepteres, og det kan altså ikke afvises, at $\mu_A = \mu_B$. Det kan altså ikke afvises at sukkerindholdet i de to partier er ens.

Opgave 3 *To substrater, PCA og jernagar (JA), sammenlignes. Der foretages 7 parallelle udsåninger af 5 homogeniserede og poolede fisk på hvert medium. Følgende total-kimtal registreres:*

Substrat	Total-kimtal (10^2kim/ml)							$\overline{x}$	s
PCA	131	253	101	214	158	98	127	154.6	58.62
Jernagar	196	132	79	125	97	133	102	123.4	37.78

a.) Undersøg om forsøgene viser, at de 2 substrater er lige egnede til tælling af totalkim.

Vi undersøger først, om der er varianshomogenitet,

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0: &\quad \sigma_1 = \sigma_2 \\ \mathrm{H}_1: &\quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{aligned}$$

Vi kan så beregne teststørrelsen,

$$F = \frac{s_{\max}^2}{s_{\min}^2} = \frac{\left(58.62 \cdot 10^2\right)^2}{\left(37.78 \cdot 10^2\right)^2} = 2.408.$$

Acceptområdet er

$$\begin{aligned} \alpha = 5\%: &\quad \left[1;\, F_{1-\alpha/2}(f_{\max}, f_{\min})\right[= [1;\, F_{0.975}(6,6)[= [1;\, 5.82] \\ \alpha = 1\%: &\quad \left[1;\, F_{1-\alpha/2}(f_{\max}, f_{\min})\right[= [1;\, F_{0.995}(6,6)[= [1;\, 11.07] \\ \alpha = 0.1\%: &\quad \left[1;\, F_{1-\alpha/2}(f_{\max}, f_{\min})\right[= [1;\, F_{0.9995}(6,6)[= [1;\, 25.6] \end{aligned}$$

H_0 accepteres, og det kan altså ikke afvises, at der er varianshomogenitet.

Da vi nu har bekræftet varianshomogeniteten, kan vi fortsætte til t-test.

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0: &\quad \mu_1 = \mu_2 \\ \mathrm{H}_1: &\quad \mu_1 \neq \mu_2 \end{aligned}$$

Vi beregner først s_{pool}^2

$$s_{\text{pool}}^2 = \frac{s_1^2 \cdot f_1 + s_2^2 \cdot f_2}{f_1 + f_2} = \frac{\left(58.62 \cdot 10^2\right)^2 \cdot 6 + \left(37.78 \cdot 10^2\right)^2 \cdot 6}{6+6} = 2.432 \cdot 10^7,$$

og så teststørrelsen

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_{\text{pool}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{154.6 - 123.4}{\sqrt{2.432 \cdot 10^7} \cdot \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}}} = 0.0118.$$

Acceptområdet er

$$\begin{aligned} \alpha = 5\%: &\quad |t| \leq t_{1-\alpha/2}(f_1 + f_2) = t_{0.975}(12) = 2.179 \\ \alpha = 5\%: &\quad |t| \leq t_{1-\alpha/2}(f_1 + f_2) = t_{0.995}(12) = 3.055 \\ \alpha = 5\%: &\quad |t| \leq t_{1-\alpha/2}(f_1 + f_2) = t_{0.9995}(12) = 4.318 \end{aligned}$$

H_0 er accepteret, og det kan altså ikke afvises, at $\mu_1 = \mu_2$. Man må altså konkludere, at substraterne er lige egnede til kimtælling.

b.) Beregn for hvert substrat 95% konfidensinterval for kimtallet.

Vi stater med at kigge på PCA.

$$\text{Kimtal}_{\text{PCA}} = \frac{\sum C}{\sum V} = \frac{(131+253+101+214+158+98+127)\cdot 10^2\text{kim}}{7\text{mL}} = 154.57\cdot 10^2 \,{}^{\text{kim}}/_{\text{mL}}$$

$$\approx 1,5\cdot 10^4 \,{}^{\text{kim}}/_{\text{mL}}.$$

Konfidensintervallet kan nu bestemmes:

$$\left[\text{Kimtal} \pm 1.96\cdot\frac{\sqrt{C}}{V}\right] = \left[1,5\cdot 10^4 \,{}^{\text{kim}}/_{\text{mL}} \pm 1.96\cdot\frac{\sqrt{(131+253+101+214+158+98+127)\cdot 10^2}\text{kim}}{7\text{mL}}\right]$$

$$= \left[1,5\cdot 10^4 \,{}^{\text{kim}}/_{\text{mL}} \pm 92.1 \,{}^{\text{kim}}/_{\text{mL}}\right]$$

$$= \left[1.49\cdot 10^4;\ 1.51\cdot 10^4\right]$$

Vi kigger nu på Jernagar.

$$\text{Kimtal}_{\text{JA}} = \frac{\sum C}{\sum V} = \frac{(196+132+79+125+97+133+102)\cdot 10^2\text{kim}}{7\text{mL}} = 123.43\cdot 10^2 \,{}^{\text{kim}}/_{\text{mL}}$$

$$\approx 1,2\cdot 10^4 \,{}^{\text{kim}}/_{\text{mL}}.$$

Konfidensintervallet kan nu bestemmes:

$$\left[\text{Kimtal} \pm 1.96\cdot\frac{\sqrt{C}}{V}\right] = \left[1,2\cdot 10^4 \,{}^{\text{kim}}/_{\text{mL}} \pm 1.96\cdot\frac{\sqrt{(196+132+79+125+97+133+102)\cdot 10^2}\text{kim}}{7\text{mL}}\right]$$

$$= \left[1,2\cdot 10^4 \,{}^{\text{kim}}/_{\text{mL}} \pm 82.3 \,{}^{\text{kim}}/_{\text{mL}}\right]$$

$$= \left[1.19\cdot 10^4;\ 1.21\cdot 10^4\right]$$